Une généralisation du théorème de Kobayashi-Ochiai

Frédéric Campana et Mihai Păun

0. Introduction

Soit X une variété kählérienne compacte X, de dimension n, munie d'une métrique ω, et une application non dégénérée $\varphi : \mathbb{C}^n \mapsto X$.

Dans cet article, nous établissons des relations entre la croissance de φ (mesurée par le degré moyen ou la fonction caractéristique) et la positivité du fibré canonique K_X (mesurée par sa pseudo-effectivité, et sa dimension numérique). Le principe général étant que la croissance de φ augmente avec la positivité de K_X.

Afin d'introduire notre premier résultat, on rappelle la notion de degré moyen (voir par exemple le travail de K. Kodaira [9]) si $\varphi : \Delta_r \to X$ est une application holomorphe, son dégré moyen est par définition

$$\deg(\varphi|\Delta_r) := \int_{\Delta_r} \varphi^*\omega^n / \int_X \omega^n.$$

Dans ce contexte, on a le théorème suivant (essentiellement optimal, par l'exemple des tores complexes):

Théorème 1. *Soit (X, ω) une variété complexe compacte de dimension n. S'il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ non dégénérée, et telle que*

$$\lim_{r \mapsto \infty} 1/r^{2n} \deg(\varphi|\Delta_r) = 0, \tag{1}$$

alors le fibré canonique de X n'est pas pseudo-effectif.

Il convient de rappeller ici que sous les mêmes hypothèses, Kodaira montre dans [9] que le tous les plurigenres de X sont nuls; le théorème 1 peut être vu comme une amélioration de son résultat.

En particulier, si la variété X est projective, cette amélioration, combinée avec le théorème principal de [3] résolvent la conjecture d'uniréglage dans cette situation:

Corollaire. *Soit X une variété projective n-dimensionelle, et $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ une application holomorphe non dégénérée, et qui vérifie la condition (1). Alors X est uniréglée.*

On remarque que, dès que $\dim(X) \geq 2$, il existe des exemples de variétés X et d'applications holomorphes $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ non-dégénérées de volume fini ((Fatou-Bieberbach) dont l'image a un complémentaire contenant un ouvert non-vide.

La démonstration du théorème 1 ne fournit aucun rapport entre les courbes rationnelles (produites par la théorie de Mori) et les images des droites complexes par l'application φ. Intuitivement, on s'attend à ce que "beaucoup" parmi les images de droites par φ se compactifient, mais ceci est faux en général: voir un contre-exemple à la fin du chapitre 1, dans lequel aucune courbe algébrique de $\mathbb{C}^n$ n'a une image algébrique par φ). Nous remercions TC Dinh et N. Sibony pour nous avoir indiqué la référence [12], dans laquelle on trouve une réponse positive à la question sur les domaines de Fatou-Bieberbach que nous nous posions.

Dans la théorie de Nevanlinna équidimensionelle, developpée entre autres par Griffiths, King, Stoll..., on définit la *fonction caractéristique* $T_\omega(\varphi, .)$ d'une application holomorphe (substitut du degré dans le cadre compact) par l'égalité:

$$T_\omega(\varphi, r) := \int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{|z|<t} \varphi^*\omega \wedge \omega_{euc}^{n-1},$$

où ω est une métrique hermitienne sur X, et $\omega_{euc} := i\partial\overline{\partial}|z|^2$ est la métrique canonique sur $\mathbb{C}^n$ (voir par exemple [7] pour une interprétation de cette quantité, et certaines de ses propriétés).

Considérons les données suivantes: X est une variété kählérienne compacte de fibré canonique K_X est pseudo-effectif, et $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ est une application holomorphe non-dégénérée. Le résultat suivant montre que la fonction caractéristique de φ croit d'autant plus vite que la dimension numérique de K_X est grande.

Théorème 2. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte, de dimension n, de fibré canonique K_X pseudo-effectif. Considérons une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^n \mapsto X$ non dégénérée. Alors il existe une constante positive $C > 0$ telle que*

$$T(\varphi, r)^{1-\nu/n} \geq Cr^2,$$

pour tout $r > 0$, où $\nu = \nu(K_X)$ est la dimension numérique de K_X.

Le théorème précédent généralise ainsi le résultat classique suivant, dû à Kodaira, Griffiths, Kobayashi–Ochiai.

Théorème ([9], [7], [8]) *Soit X une variété de dimension n, de type général. Alors pour toute application $\varphi : \mathbb{C}^n \mapsto X$, on a: $\varphi^*(\omega^n) = 0$, et φ est donc dégénérée.*

Si le fibré canonique K_X est seulement situé sur le bord du cône *big*, il semble beaucoup plus délicat d'analyser les conséquences du fait que la pseudo-forme volume de Kobayashi de X soit dégénérée (évidemment, on ne peut pas espérer un énoncé analogue au théorème précedent, comme le montre le cas des tores). Néanmoins, on voudrait proposer le problème suivant.

Conjecture 1. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte telle que K_X est pseudo-effectif. Supposons que X est revêtue par $\mathbb{C}^n$.*

Alors la dimension numérique de K_X est zero.(Lorsque X est projective, la condition de pseudo-effectivité est superflue, puisque K_X est nef).

Cette conjecture généralise Kobayashi-Ochiai et implique une célèbre conjecture d'Iitaka, par des arguments standard.

Pour les courbes entières $\varphi : \mathbb{C} \mapsto X$, on dispose du lemme de "reparamétrisation" de Brody: étant donnée φ, non-constante, il existe une application $\widehat{\varphi} : \mathbb{C} \mapsto X$, telle que $\sup_{\mathbb{C}} |\widehat{\varphi}'(t)| = 1$. Le procédé de Brody ne donne que des résultats partiels en plusieurs variables: si $\varphi : \mathbb{C}^m \mapsto X$ est une application holomorphe, alors il existe une suite $\varphi_k : \Delta_k \mapsto X$ (ici, Δ_k désigne le polydisque de rayon égal à k) telle que $\varphi_k^* \omega^m \leq \dfrac{d\lambda}{\prod_j (1 - |t_j/k|^2)^2}$, avec égalité à l'origine. On peut montrer que si, de plus, les images des applications φ_k ne s'applatissent pas lorsque $k \mapsto \infty$, alors la dimension numérique de K_X vaut zéro (la preuve de cette affirmation est très voisine de celle qui sera donnée pour le théorème 2, donc on la laisse au soin du lecteur).

Le dernier paragraphe de cet article concerne les applications quasi-conformes. Par analogie avec la pseudo-forme volume de Kobayashi, on introduit au troisième chapitre la notion de *pseudo-forme volume quasi-conforme.* Comme conséquence du théorème 2 on obtient:

Corollaire. *Soit X une variété kählérienne compacte, telle que K_X soit nef. Si la pseudo-forme volume quasi-conforme est non-dégénérée, alors $\nu(K_X) \geq 1$.*

Ce corollaire nous a été suggeré par Y.-T. Siu, que nous remercions vivement.

Dans le même esprit, une application $\varphi : \mathbb{C}^n \mapsto X$ est dite *quasi-conforme en moyenne* s'il existe une constante positive δ telle que

$$\int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t)} |J(\varphi)|_\omega^{2/n} d\lambda \geq \delta T_\omega(\varphi, r)$$

pour tout $r \gg 0$; on note $J(\varphi)$ le jacobien de l'application φ. Pour une telle application, nous allons montrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte de dimension n, telle que K_X est pseudo-effectif. S'il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^n \mapsto X$, quasi-conforme en moyenne, alors $\nu(K_X) = 0$.*

On remarquera que les théorèmes 2 et 3 etablissent des cas particuliers de la conjecture proposée ci-dessus.

1. Applications de degré moyen à croissance lente

Considérons une application holomorphe $\varphi : \Delta_r \to X$, où X est une variété complexe compacte de dimension n, et Δ_r désigne le polydisque de rayon r dans $\mathbb{C}^n$. On munit X d'une métrique hermitienne ω; la quantité:

$$\deg(\varphi|\Delta_r) := \int_{\Delta_r} \varphi^* \omega^n / \int_X \omega^n$$

peut être interprétée comme le degré moyen de φ sur ce polydisque.

Dans ce contexte, notre résultat est le suivant:

Théorème 1. *Soit (X, ω) une variété complexe compacte de dimension n. S'il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ non dégénérée, et telle que:*

$$\lim_{r \mapsto \infty} 1/r^{2n} \deg(\varphi|\Delta_r) = 0, \tag{1}$$

alors le fibré canonique de X n'est pas pseudo-effectif.

Remarquons que le produit d'un tore de dimension $n-1$ par $\mathbb{P}^1$ montre que l'exposant $2n$ est optimal comme entier pair.

Comme on l'a déjà rappelé dans l'introduction , Kodaira montre dans [6] que sous les hypothèses du théorème 1, on a $H^0(X, K_X^m) = 0$, pour tout $m \geq 1$. Maintenant si L est un fibré en droites sur X, tel que pour un certain $m \geq 0$ on ait $H^0(X, L^m) \neq 0$, alors L est pseudo-effectif. Ainsi, le théorème 1 peut-etre vu comme généralisation du théorème de Kodaira. D'autre part, bien qu'en général la pseudo-effectivité d'un fibré ne soit pas equivalente à l'existence de sections non-nulles pour une de ses puissances, dans le cas du fibré canonique cela devrait être vrai, d'après la conjecture d'abondance.

Preuve. Supposons que K_X soit pseudo-effectif; alors il existe une fonction $f \in L^1(X)$, semi-continue supérieurement, telle que:

$$\Theta_h(K_X) + i\partial\overline{\partial} f \geq 0 \tag{2}$$

au sens des courants sur la variété X, où h est la métrique duale de $\det(\omega)$ sur le fibré canonique (voir [3], par exemple).

Prenons l'image inverse de (2) sur $\mathbb{C}^n$ via l'application φ; on a

$$i\partial\overline{\partial}(\log(||J_\omega(\varphi)||^2 e^{f\circ\varphi})) \geq 0 \tag{3}$$

et alors la fonction $\tau : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $\tau(z) := ||J(\varphi, z)||^2_\omega e^{f\circ\varphi(z)}$ sera psh sur $\mathbb{C}^n$. On rappelle maintenant la propriété de convexité suivante des fonctions psh (voir [11], par exemple).

Lemme. *La fonction*

$$M_\tau(t_1, ..., t_n) := \int_{[0,2\pi]^n} \tau(t_1 e^{i\theta_1}, ..., t_n e^{i\theta_n}) d\theta$$

est croissante en chaque variable, et convexe en $\log(t_j)$.

Grâce a ce lemme, on a la suite d'inégalités

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_r} \tau(z) d\lambda(z) = &\int_{[0,r]^n} t_1...t_n M_\tau(t_1, ..., t_n) dt_1...dt_n \geq \\ \geq &\int_{[r_0,r]^n} t_1...t_n M_\tau(t_1, ..., t_n) dt_1...dt_n \geq \\ \geq &M_\tau(r_0, ..., r_0) \int_{[r_0,r]^n} t_1...t_n dt_1...dt_n = \\ = &(\frac{r^2 - r_0^2}{2})^n M_\tau(r_0, ..., r_0).\end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction f est bornée supérieurement sur X, et donc

$$\int_{\Delta_r} \tau(z) d\lambda(z) \leq C \int_{\Delta_r} ||J_\omega(\varphi)||^2_z d\lambda = \int_{\Delta_r} \varphi^* \omega^n$$

La condition de croissance imposée par hypothèse sur le degré moyen de l'application φ montre que $M_\tau(r_0, ..., r_0) = 0$, et ceci est vrai pour tout rayon $r_0 > 0$. Notre hypothèse permet également de changer l'origine de $\mathbb{C}^n$, quitte à faire une translation, donc en resumé $\tau \equiv 0$. Mais ceci est clairement impossible, car l'image de l'application φ contient un ouvert de la variété X. La contradiction ainsi obtenue montre que K_X n'est pas pseudo-effectif, et notre théorème est démontré.

Supposons à présent que X est une variété projective, de dimension n. D'après les résultats de [3], on sait que si le fibré canonique n'est pas pseudo-effectif, alors X est unireglée. Le théorème 3 admet donc le corollaire suivant.

Corollaire *Soit X une variété projective de dimension n. S'il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ non dégénérée, et telle que:*

$$\lim_{r\mapsto\infty} 1/r^{2n}\deg(\varphi|\Delta_r) = 0,$$

alors X est uniréglée.

Conjecturalement, toute compactification de $\mathbb{C}^n$ devrait être rationnelle. Donc on peut voir le corollaire précédent comme un premier pas vers cette conjecture. Malheureusement, la façon dont les courbes rationnelles apparaissent dans notre résultat (i.e. via la théorie de Mori) n'est pas du tout explicite.

Il est d'ailleurs possible qu'aucune courbe algébrique de $\mathbb{C}^n$ n'ait pour image une courbe algébrique de X, même si $\deg(\varphi|\Delta_r)$ est uniformément bornée: soit $\Omega \cong \mathbb{C}^n \subsetneq \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n = X$ un domaine de Fatou-Bieberbach obtenu comme bassin d'attraction d'un automorphisme régulier (voir [12], 2.2, p. 124, et p.125 pour des exemples) de $\mathbb{C}^n, n \geq 3$. Alors Ω ne contient aucune courbe algébrique (par [12], Théorème 2.4.4 et remarque 2.4.5 (1) , p. 136), et on est dans la situation évoquée ci-dessus.

La méthode de démonstration du théorème 1 précédent devrait permettre d' établir la généralisation suivante (illustrée par le produit $X = \mathbb{P}^{n-p+1} \times A$, où A est une variété abélienne de dimension $p-1$):

Question: *Soit X une variété projective de dimension n. S'il existe une application holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ non dégénérée, et telle que:*

$$\lim_{r\mapsto\infty} 1/r^{2p}\deg(\varphi|\Delta_r) = 0,$$

et si $f : X \mapsto Y$ est une application méromorphe surjective telle que $dim(Y) = p$, alors: Y est-elle uniréglée?

Une réponse affirmative à cette question montrerait que le *quotient rationnel* de X (voir [4] et [10]) est de dimension au plus $(p-1)$. En particulier, si $\deg(\varphi|\Delta_r)$ est borné, X (et donc toute compactification de $\mathbb{C}^n$) serait du moins rationnellement connexe.

2. Preuve du théorème 2

2.1 On commence par rappeler la notion de dimension numérique d'une classe de cohomologie pseudo-effective, telle qu'elle a été introduite par Boucksom, Tsuji dans [1], [2], [13].

Soit $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ une classe de cohomologie pseudo-effective (i.e., il existe un courant positif fermé $T \in \{\alpha\}$, voir [3] pour une présentation plus complète de cette notion). Pour chaque nombre réel $\varepsilon > 0$, la classe de cohomologie $\{\alpha + \varepsilon\omega\}$ est "big", et il existe un courant positif fermé $T_\varepsilon \in \{\alpha + \varepsilon\omega\}$, tel que ses singularités sont concentrées le long d'un ensemble analytique Y_ε. On définit le *nombre d'intersection mobile* (voir [2]) comme suit

$$(\alpha^k \wedge \omega^{n-k}) := \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \sup_{T_\varepsilon \in \{\alpha + \varepsilon\omega\}} \int_{X \setminus Y_\varepsilon} T_\varepsilon^k \wedge \omega^{n-k}.$$

Définition ([2]) *Soit $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ une classe de cohomologie pseudo-effective sur X. La dimension numérique de α est définie par*

$$\nu(\alpha) := \max\{k \in \mathbb{Z}/(\alpha^k \wedge \omega^{n-k} \neq 0\}.$$

Il a été demontré par S.Boucksom (voir [1]) qu'une classe $\{\alpha\}$ est de dimension numérique maximale si et seulement si elle contient un réprésentant strictement positif. Concernant l'autre cas extrême $\nu(\alpha) = 0$, la situation est malheureusement beaucoup moins bien comprise (cf. [1] pour quelques résultats dans cette direction).

2.2 Supposons à présent qu'on ait $\nu := \nu(K_X) \geq 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a un courant positif $T_\varepsilon \in c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega\}$, dont les singularités sont concentrées le long d'un ensemble analytique Y_ε, tel que

$$\int_{X \setminus Y_\varepsilon} T_\varepsilon^\nu \wedge \omega^{n-\nu} \geq \delta_0 > 0$$

uniformément par rapport à ε. Autrement dit, il existe une famille de modifications $\mu_\varepsilon : X_\varepsilon \to X$ telle que $\mu_\varepsilon^* T_\varepsilon = [E_\varepsilon] + \widetilde{\alpha}_\varepsilon$, où E_ε est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif, (dont la partie μ_ε-exceptionnelle provient des singularités de T_ε en codimension 2), et $\widetilde{\alpha}_\varepsilon$ est une $(1,1)$–forme semi-positive sur X_ε, tels que

$$\int_{X_\varepsilon} \widetilde{\alpha}_\varepsilon^\nu \wedge \mu_\varepsilon^* \omega^{n-\nu} \geq \delta_0 > 0.$$

2.3 On rappelle maintenant que si $\mu : X_1 \to X$ est un éclatement de centre lisse $Y \subset X$, alors il existe une métrique h sur le fibré associé au diviseur exceptionnel E telle que pour tout $0 < \delta \ll 1$, la forme différentielle $\widetilde{\omega}_\varepsilon := \mu^*\omega - \delta\Theta_h(E)$ est positive définie sur X_1. Ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$, on construit $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ une métrique kählérienne sur X_ε, telle que:

(i) $\widetilde{\omega}_\varepsilon - \mu_\varepsilon^*\omega$ soit un multiple (négatif) du diviseur exceptionnel.

(ii) en chaque point de X_ε, on a $\widetilde{\omega}_\varepsilon \geq 1/2\mu_\varepsilon^*\omega$.

(iii) le volume de $(X_\varepsilon, \widetilde{\omega}_\varepsilon)$ soit majoré par le volume de $(X, 2^{1/n}\omega)$.

En effet, les conditions (i)-(iii) sont clairement satisfaites dans le cas d'un seul éclatement de centre lisse (quitte à choisir le paramètre δ ci-dessus assez petit). Le cas général est déduit du fait qu'on peut supposer que la modification μ_ε est une composée d'éclatements de centres lisses.

2.4 Nous utilisons maintenant le théorème de Yau [14], afin d'obtenir dans la classe $\{\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon\}$ un réprésentant dont le déterminant est constant par rapport à $\widetilde{\omega}_\varepsilon$.

Théorème (Yau). *Soit (X, β) une variété kählérienne compacte, de dimension n, et soit dV un élément volume sur X, tel que $\int_X \beta^n = \int_X dV$. Alors il existe $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que*

(i) $\beta + i\partial\overline{\partial}\rho > 0$ *sur* X.

(ii) $(\beta + i\partial\overline{\partial}\rho)^n = dV$.

On applique le théorème précédent pour chaque X_ε, munie de la métrique kählérienne $\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon$, et l'élément volume $dV := C(\varepsilon)\widetilde{\omega}_\varepsilon^n$. pour une certaine constante adéquate de normalisation $C(\varepsilon)$, dont le role est de satisfaire la condition cohomologique du théorème de Yau. Ainsi on montre l'existence d'une famille de fonctions $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X_\varepsilon)$, telle que

(a) $\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon + i\partial\overline{\partial}\rho_\varepsilon > 0$ sur X_ε.

(b) $(\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon + i\partial\overline{\partial}\rho_\varepsilon)^n = C(\varepsilon)\widetilde{\omega}_\varepsilon^n$.

Nous observons maintenant que, grâce au théorème de Yau, les propriétés numériques de la classe canonique se reflètent dans ses propriétés métriques, i.e. on obtient un minorant pour la constante $C(\varepsilon)$ en intégrant l'égalité (b) ci-dessus. Ainsi, on montre l'existence d'une constante $C_1 > 0$, telle que $C(\varepsilon) \geq C_1\varepsilon^{n-\nu}$, lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet, l'égalité (b) implique

$$
\begin{aligned}
C(\varepsilon)\,\mathrm{Vol}(X_\varepsilon, \widetilde{\omega}_\varepsilon) = & \int_{X_\varepsilon} \big(\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon\big)^n \geq \\
& \geq C_n^\nu \varepsilon^{n-\nu} \int_{X_\varepsilon} \widetilde{\alpha}_\varepsilon^\nu \wedge \widetilde{\omega}_\varepsilon^{n-\nu} \geq C_n^\nu / 2^{n-\nu} \varepsilon^{n-\nu} \int_{X_\varepsilon} \widetilde{\alpha}_\varepsilon^\nu \wedge \mu_\varepsilon^* \omega^{n-\nu} \geq \\
& \geq C_0 \varepsilon^{n-\nu}
\end{aligned}
$$

(dans la suite des inégalités précédentes, on a utilisé la semi-positivité de α_ε, ainsi que la définition de la dimension numérique dans le cadre pseudo-effectif). L'existence de C_1 se déduit du fait que le volume de $(X_\varepsilon, \widetilde{\omega}_\varepsilon)$ est uniformément majoré.

2.5 Considérons le courant image directe $\Theta_\varepsilon = \mu_{\varepsilon,*}(\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon + [E_\varepsilon] + i\partial\overline{\partial}\rho_\varepsilon)$ sur la variété X. C'est un courant positif fermé et sa classe de cohomologie est $c_1(K_X) + 2\varepsilon\{\omega\}$, comme on le voit immédiatement. De plus, Θ_ε est non-singulier sur $X \backslash Y_\varepsilon$ et l'équation de Calabi-Yau (ii) qu'on résout sur X_ε montre l'existence d'une constante $C_2 > 0$ telle que

$$
\Theta_\varepsilon^n \geq C_2 \cdot \varepsilon^{n-\nu} \cdot \omega^n \tag{4}
$$

en tout point de $X\backslash Y_\varepsilon$. Pour vérifier la relation (4), plaçons-nous en un point $x_0 \in X \setminus Y_\varepsilon$. Au voisinage de x_0, on obtient $\Theta_\varepsilon = \mu_{\varepsilon,*}(\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon + i\partial\overline{\partial}\rho_\varepsilon)$, car le support de $[E_\varepsilon]$ est contenu dans l'image inverse de Y_ε. L'égalité (b) combinée avec la propriété (ii) de la famille de métriques (ω_ε) et le minorant de $C(\varepsilon)$ montrent que

$$(\widetilde{\alpha}_\varepsilon + \varepsilon\widetilde{\omega}_\varepsilon + i\partial\overline{\partial}\rho_\varepsilon)^n \geq C_1\varepsilon^{n-\nu}/2^n\mu_\varepsilon^*\omega^n. \tag{5}$$

Maintenant au voisinage de x_0, l'application μ_ε est un isomorphisme, et ainsi l'inégalité (5) implique (4), avec une constante $C_2 := C_1/2^n$.

2.6 On écrit maintenant $\Theta_\varepsilon = \alpha + 2\varepsilon\omega + i\partial\overline{\partial}f_\varepsilon$, pour une certaine fonction $f_\varepsilon \in L^1(X)\cap\mathcal{C}^\infty(X\backslash Y_\varepsilon)$, normalisée de telle sorte que $\displaystyle\int_X f_\varepsilon\omega^n = 0$ (pour simplifier l'écriture, on a noté $\alpha := \Theta_{\det(\omega)}(K_X)$). Le but de la normalisation de f_ε est d'obtenir la relation d'uniformité suivante.

Lemme. *Il existe une constante positive $C_3 := C_3(X, \alpha, \omega)$ telle que*

$$\max\Big(\int_X |f_\varepsilon| dV_\omega, \sup_X(f_\varepsilon)\Big) \leq C_3 \tag{6}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve du lemme. Tout d'abord, le lemme est bien connu dans la cadre suivant: soit β une $(1,1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, et $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ une fonction telle que $\beta + i\partial\overline{\partial}f \geq 0$, et telle que $\int_X f dV_\omega = 0$. Alors

$$\max\Big(\int_X |f| dV_\omega, \sup_X(f)\Big) \leq C(X, \beta, \omega) \tag{7}$$

(voir par exemple [5]). L'énoncé général est conséquence de ce fait, et du théorème de regularisation suivant, dû à Demailly:

Théorème (([6]).) *Soit X une variété complexe compacte et soit $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}f$ un courant positif fermé de type $(1,1)$. Alors pour chaque entier positif k, il existe une fonction $f_k \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que:*

(1) $f_k \to f$ en norme L^1 et ponctuellement sur X. Posant, de plus: $T_k = \alpha + i\partial\overline{\partial}f_k$, alors:

(2) $T_k \in \{\alpha\}$, et $T_k \geq -\lambda_k\omega$, où $\lambda_k(x) \to \nu(T, x)$ lorsque $k \to \infty$ (autrement dit, en chaque point $x \in X$, la perte de positivité est de la taille du nombre de Lelong $\nu(T, x)$ du courant initial T).

En effet, on applique à chaque f_ε le théorème précédent; l'observation importante est la suivante. Etant donné que la classe de cohomologie des courants Θ_ε est bornée par rapport à ε, les nombres de Lelong de Θ_ε le sont également, car ils sont dominés par la masse du courant, et dans le cadre kählérien, cette quantité est cohomologique (ceci reste, en fait, vrai pour les courants de type $(1,1)$ sur une variété complexe compacte, grâce à l'existence des métriques de Gauduchon). Donc, la perte de positivité pour les courants régularisés est uniforme par rapport aux paramètres ε, k, et ainsi notre lemme est démontré par le résultat rappelé au début de la preuve.

2.7 Revenons maintenant à notre application $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$. Si on note Δ_1 le polydisque unité, alors $B_\omega(x_0, \delta) \subset \varphi(\Delta_1)$ pour un certain rayon $\delta > 0$, et la relation (1) montre l'existence d'un $x_\varepsilon \in \Delta_1$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$f_\varepsilon \circ \varphi(x_\varepsilon) \geq -C_3'/\delta^{2n} \tag{7'}$$

Afin de ne pas trop alourdir les notations, on va supposer que $x_\varepsilon = 0$, l'origine de $\mathbb{C}^n$ (les arguments presentés par la suite montreront qu'on peut se le permettre, car translater l'origine de $\mathbb{C}^n$ en x_ε revient à changer r en $r+1$ à la fin de la preuve, et la conclusion désirée n'est pas affectée par ce changement).

Sur $\mathbb{C}^n$, considérons le jacobien $J(\varphi) \in H^0(\mathbb{C}^n, \varphi^* K_X^{-1})$. La norme de $J(\varphi)$ par rapport à la métrique $\det(\omega)$ sur K_X^{-1} est donnée par l'égalité $\varphi^*\omega^n = ||J(\varphi)||_\omega^2 d\lambda$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, on a

$$i\partial\overline{\partial}\log\Big(\|J(\varphi)\|_\omega^2 e^{f_\varepsilon\circ\varphi}\Big) + 2\varepsilon\varphi^*\omega \geq \varphi^*\Theta_\varepsilon$$

car la différence est donnée par la courant d'intégration sur le lieu des zéros du jacobien.

Maintenant, en tout point $z \in \mathbb{C}^n \backslash \varphi^{-1}(Y_\varepsilon)$, on a l'inégalité

$$\varphi^*\Theta_\varepsilon \wedge (i\partial\overline{\partial}\|z\|^2)^{n-1} \geq C_2^{1/n}\varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}}\|J(\varphi)\|^{\frac{2}{n}} \cdot (i\partial\overline{\partial}\|z\|^2)^n$$

Pour vérifier cette affirmation, soient $\lambda_\varepsilon^{(j)}(z)$ les valeurs propres de $\varphi^*\Theta_\varepsilon$ par rapport à la métrique euclidienne au point $z \in \mathbb{C}$. La relation (4) montre que

$$\prod \lambda_\varepsilon^{(j)}(z) \geq C_2\varepsilon^{n-\nu}||J(\varphi, z)||_\omega^2$$

et par l'inégalité de la moyenne on déduit un minorant pour la somme des valeurs propres, qui est précisement l'inégalité ci-dessus. De plus, on remarque que cette relation reste vraie sur $\mathbb{C}^n$ tout entier, au sens des distributions. En conclusion on obtient

$$\big(i\partial\overline{\partial}\log\|J(\varphi)\|_\omega^2 e^{f_\varepsilon\circ\varphi} + 2\varepsilon\varphi^*\omega\big) \wedge (i\partial\overline{\partial}\|z\|^2)^{n-1} \geq \varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}}\|J(\varphi)\|_\omega^{\frac{2}{n}} d\lambda \tag{8}$$

2.8 Pour la suite, on voudrait utiliser l'inégalité (8) afin d'appliquer les arguments de courbure négative (cf. Ahlfors, Kodaira, Griffiths) mais malheureusement, on ne peut pas le faire directement, à cause du terme $\varphi^*\omega \wedge (i\partial\overline{\partial}\|z\|^2)^{n-1}$ (la trace de la métrique image inverse par rapport à la métrique euclidienne). Afin d'inclure ce terme dans la derivée logarithmique ci-dessus, on résout le problème de Dirichlet suivant.

$$\begin{cases} \Delta\Psi_r = (\varphi^*\omega) \wedge (i\partial\overline{\partial}\|z\|^2)^{n-1}/d\lambda \quad dans \quad \|z\| \leq r \\ \Psi_r = 0 \quad sur \quad \|z\| = r. \end{cases}$$

La solution Ψ_r est déterminée de manière unique par la formule de Green; on laisse au soin du lecteur de vérifier que la valeur au bord qu'on a considérée est optimale pour ce qui va suivre.

A l'aide de la fonction Ψ_r l'inégalité (8) s'écrit

$$\Delta\left(\log\|J(\varphi)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{\varepsilon\Psi_r + f_\varepsilon\circ\varphi}{n}}\right) \geq \frac{C_2^{1/n}}{n}\varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}}\|J(\varphi)\|_\omega^{\frac{2}{n}} \tag{9}$$

Grâce à l'inégalité (6), la dernière relation implique

$$\Delta\left(\log\|J(\varphi)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{\varepsilon\Psi_r + f_\varepsilon\circ\varphi}{n}}\right) \geq C_4\varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}}\|J(\varphi)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{f_\varepsilon\circ\pi}{n}} \tag{10}$$

(l'expression de la constante C_4 se déduit facilement de C_2 et C_3).

Par ailleurs, la fonction Ψ_r solution du problème de Dirichlet est sous-harmonique, donc par le principe du maximum, $\max\limits_{\|z\|\leq r} \Psi_r(z) = 0$, et finalement on peut écrire

$$\Delta\left(\log\|J(\varphi)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{\varepsilon\Psi_r + f_\varepsilon\circ\varphi}{n}}\right) \geq C\varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}}\|J(\varphi)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{\varepsilon\Psi_r + f_\varepsilon\circ\varphi}{n}} \tag{11}$$

Les arguments de courbure négative suivants sont classiques (voir par exemple [5], [6]). Sur $\|z\| \leq r$, considérons la fonction τ_ε définie par :

$$z \to \left(1 - \frac{\|z\|^2}{r^2}\right)^2 \|J(\varphi, z)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{\varepsilon\Psi_r(z) + f_\varepsilon\circ\varphi(z)}{n}} := \tau_\varepsilon(z)$$

C'est une fonction positive, et sur la sphère ($\|z\| = r$) elle vaut zéro; par conséquent, son point de maximum est atteint en un z_{max} de $\|z\| < r$. Alors on a

$$\Delta\log\tau_\varepsilon(z_{max}) \leq 0,$$

Par ailleurs, un calcul sans difficulté montre que:

$$i\partial\overline{\partial}\log\left(1 - \frac{\|z\|^2}{r^2}\right) \wedge \left(i\partial\overline{\partial}\|z\|^2\right)^{n-1} \geq -\frac{d\lambda}{r^2(1 - \frac{\|z\|^2}{r^2})^2} \tag{12}$$

Donc au point de maximum $z = z_{max}$ on aura:

$$C_4 \varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}} \|J(\varphi, z)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{\varepsilon \Psi_r(z) + f_\varepsilon \circ \varphi(z)}{n}} \leq \frac{1}{r^2(1 - \frac{\|z\|^2}{r^2})^2},$$

comme conséquence de (11) et (12). Alors on obtient:

$$C_4 \varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}} \|J(\varphi, z)\|_\omega^{\frac{2}{n}} e^{\frac{\varepsilon \Psi_r(z) + f_\varepsilon \circ \varphi(z)}{n}} \cdot (1 - \frac{\|z\|^2}{r^2})^2 \leq \frac{1}{r^2}$$

au point z_{max}, et donc $\tau_\varepsilon(z) \leq \dfrac{1}{C_4 \varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}} r^2}$ pour $z \in \mathbb{B}(r)$. En particulier, si $z = 0$, l'inégalité précédente devient:

$$\|J(\varphi, 0)\|_\omega^{\frac{2}{n}} \varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}} e^{\frac{\varepsilon \Psi_r(0) + f_\varepsilon \circ \varphi(0)}{n}} \leq \frac{1}{r^2}.$$

Afin de déterminer la quantité $\Psi_r(0)$, on applique la formule de Green

$$\int_{\|z\|=r} \Psi_r(\xi) d\sigma - \Psi_r(0) = \int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t)} \Delta \Psi_r d\lambda$$

et comme Ψ_r est la solution du problème de Dirichlet, on voit que $\Psi_r(0) = -T(\varphi, r)$, l'indicatrice de croissance de la fonction φ. En conclusion, on a

$$\|J(\varphi, 0)\|_\omega^{\frac{2}{n}} \leq \frac{C_5}{r^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{1-\frac{\nu}{n}}} \cdot e^{\varepsilon T(\varphi, r)},$$

compte-tenu de l'inégalité (7').

On peut remarquer que dans l'expression précédente, la constante C_5 dépend uniquement des quantités suivantes: géométrie de (X, ω), et rayon de la boule euclidienne contenue dans l'image $\varphi(\Delta_1)$.

Maintenant on observe que les paramètres ε et r sont indépendants. Par conséquent, on peut prendre $\varepsilon := T^{-1}(\varphi, r)$ et on obtient

$$\|J(\varphi, 0)\|_\omega^{\frac{2}{n}} \leq \frac{C}{r^2} \cdot (T(\varphi, r))^{1-\frac{\nu}{n}}$$

La preuve du théorème 1 est ainsi complète.

Remarque. Comme conséquence de la méthode de démonstration précédente, on obtient l'enoncé suivant:

Théorème $2'$ Soit (X^n, ω) une variété kählérienne compacte de dimension n, dont le fibré canonique K_X est est pseudo-effectif, avec $\nu := \nu(K_X)$.

Si $\varphi : B^n(r) \to X$ est définie sur une boule de rayon $r > 1$ de $\mathbb{C}^n$, et si $\varphi(B(1)) \supset B_\omega(x_0, \delta_0)$ pour un certain $x_0 \in X$, alors

$$T(\varphi, r')^{1-\nu/n} \geq C(X, \omega, \delta_0) \cdot (r')^2 \cdot \|J(\varphi, 0)\|_\omega^{\frac{2}{n}} \quad \forall \;\; r' \leq r.$$

Pour faire le lien avec la première partie de cet article, il serait intéressant d'analyser les conséquences de la positivité numérique de K_X sur la croissance du degré moyen de l'application φ (i.e., d'obtenir l'analogue du théorème 2 pour le degré moyen à la place de la fonction caractéristique de φ).

3. Applications quasi-conformes.

Nous rappelons qu'étant donné un point $x_0 \in X$, on peut considérer la quantité :

$$r(x_0) = sup \left\{ r > 0 \ \ / \ \ \exists \ \ f : \mathbb{B}^n(r) \to X \ tel \ que \ \begin{cases} f(0) = x_0 \\ \|J(f,0)\|_\omega = 1 \end{cases} \right\}$$

Alors le théorème de Kobayashi-Ochiai peut être reformulé comme suit.

Théorème (KO) *Soit X une variété projective, dont le fibré canonique est big. Alors $r(x_0) < \infty$, $\forall x_0 \in X$.*

Comme cela nous a été sugéré par Y-T Siu, on peut considérer une quantité analogue où seules les applications quasi-conformes seront impliquées. On définit

$$r_{q,C}(x_0) = sup \left\{ r > 0 / \exists \ \ f : \mathbb{B}^n(r) \to X \ tel \ que \ \begin{cases} f(0) = x_0 \\ \|J(f,0)\|_\omega = 1 \\ \|df(z)\|_\omega < C \cdot \|J(f,z)\|_\omega^{\frac{1}{n}} \end{cases} \right\}$$

Dans ce contexte, la méthode de démonstration du théorème 2 donne le résultat suivant.

Corollaire 3.1 *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte avec K_X nef. Si $r_{q,C}(x_0) = +\infty$ pour un certain $x_0 \in X$, alors $\nu(K_X) = 0$.*

Preuve. L'hypothèse implique l'existence d'une famille de boules $\varphi_r : \Delta_r \to X$ telle que

$$\begin{cases} (1)\varphi_r(0) = x_0 \\ (2)\|J(\varphi_r, 0)\| = 1 \\ (3)\|d\varphi_r(z)\| < C \cdot \|J(\varphi_r, z)\|^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

où la dernière condition est vérifiée en tout point z du polydisque Δ_r.

Le fibré canonique de X étant nef, le théorème de Yau (voir la preuve du théorème 2) montre l'existence d'une suite de métriques $h_\varepsilon := he^{-f_\varepsilon}$, telles que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X)$, et telles que

$$(\Theta_h(K_X) + i\partial\overline{\partial} f_\varepsilon + \varepsilon\omega)^n = C_\varepsilon \omega^n \tag{13}$$

où la constante de normalisation C_ε est de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon^{n-\nu})$, et où $\nu = \nu(K_X)$ désigne la dimension numérique du fibré canonique de X.

Pour chaque $r > 0$, l'inégalité de la moyenne combinée avec (13) implique

$$(14) \quad (i\partial\overline{\partial}\log||J(\varphi_r)||^2 e^{f_\varepsilon\circ\varphi_r} + \varepsilon\varphi_r^*\omega) \wedge (i\partial\overline{\partial}||z||^2)^{n-1} \geq \varepsilon^{1-\nu/n}||J(\varphi_r)||^{2/n} d\lambda$$

Supposons à présent que $\nu(K_X) \geq 1$; on aura alors clairement $\varepsilon^{1-\nu/n} \gg \varepsilon$, lorsque $\varepsilon \mapsto 0$. L'inégalité (14) et l'hypothèse sur φ_r donnent:

$$(15) \qquad \Delta \log ||J(\varphi_r)||^{2/n} e^{f_\varepsilon\circ\varphi_r/n} \geq \varepsilon^{1-\nu/n}||J(\varphi_r)||^{2/n} e^{f_\varepsilon\circ\varphi_r/n}.$$

(car le terme $(\varphi_r^*\omega) \wedge (i\partial\overline{\partial}||z||^2)^{n-1}$ est dominé –à une constante universelle près– par $\|J(\varphi_r)\|^{\frac{2}{n}} d\lambda$, grâce à la relation de quasi-conformalité (3)).
Fixons par la suite une valeur de $\varepsilon \ll 1$ telle que (15) soit satisfaite. Le reste de la preuve suit les arguments de courbure négative dejà exposés en 2.9, et on obtient ainsi

$$(16) \qquad ||J(\varphi_r, 0)||_\omega^{2/n} e^{f_\varepsilon\circ\varphi_r(0)/n} \leq C/r^2.$$

Maintenant les conditions (1) et (2) montrent que la relation (16) est équivalente à l'inégalité: $e^{f_\varepsilon(x_0)} \leq C/r^2$, et on obtient une contradiction lorsque $r \mapsto \infty$. La preuve du corollaire est achevée.

Dans le cours de ce dernier paragraphe, nous allons étendre le résultat précédent au cas où φ est seulement supposée quasi-conforme *en moyenne.*

Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ une application holomorphe non-dégénérée. On suppose l'existence d'une constante $\delta > 0$, telle que

$$(17) \qquad \int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t)} ||J(\varphi)||_\omega^{2/n} d\lambda \geq CT_\omega(\varphi, r)$$

pour tout $r \gg 0$. Par exemple, si l'application φ est quasi-conforme, la condition (17) est automatiquement satisfaite; en général, appelons une telle application *quasi-conforme en moyenne.* Nous allons maintenant présenter une preuve de l'enoncé suivant.

Théorème 3.2. *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, et $\varphi : \mathbb{C}^n \to X$ une application holomorphe quasi-conforme en moyenne. Si le fibré canonique de X est nef, alors $\nu(K_X) = 0$.*

Preuve. Dans ce qui va suivre, on utilise de façon essentielle des arguments de la théorie de Nevanlinna, et également les métriques sur le fibré canonique qu'on a construites au cours de la preuve du théorème 2. Le point de départ est l'inégalité:

$$(18) \qquad i\partial\overline{\partial}\log ||J(\varphi)||^2 e^{f_\varepsilon\circ\varphi} + \varepsilon\varphi^*\omega) \wedge (i\partial\overline{\partial}||z||^2)^{n-1} \geq \varepsilon^{1-\nu/n}||J(\varphi)||^{2/n}d\lambda$$

en tout point de $\mathbb{C}^n$. On intègre cette relation à la manière de Nevanlinna; ainsi, pour tout $r > 0$ on aura:

$$\int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B(t)} \Delta\log ||J(\varphi)||^2_\omega e^{f_\varepsilon\circ\varphi}d\lambda$$

$$\geq \varepsilon^{1-\nu/n}\int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B(t)} ||J(\varphi)||^{2/n}_\omega d\lambda - \varepsilon T_\omega(\varphi, r).$$

Si $\nu(K_X) > 0$, alors quitte à prendre $\varepsilon \ll 1$, (qui sera fixé par la suite), notre hypothèse de quasi-conformalité en moyenne et la relation ci-dessus entrainent:

$$(19) \qquad \int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B(t)} \Delta\log ||J(\varphi)||^2_\omega e^{f_\varepsilon\circ\varphi}d\lambda \geq C_\varepsilon\int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B(t)} ||J(\varphi)||^{2/n}_\omega d\lambda$$

Maintenant, on rappelle la formule de Jensen suivante:

$$\int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B(t)} \Delta\rho d\lambda = \int_{|z|=r}\rho d\sigma - \rho(0)$$

valable pour toute fonction ρ assez régulière pour que les quantités ci-dessus aient un sens.

Grâce à cette identité, le terme se trouvant de gauche de l'inégalité (19) est égal à $\displaystyle\int_{|z|=r}\log ||J(\varphi)||^2 d\sigma + \mathcal{O}(1)$. La concavité de la fonction logarithme et les considérations précédentes impliquent l'inégalité suivante:

$$(20) \qquad \log\int_{|z|=r} ||J(\varphi)||^{2/n}_\omega d\sigma + \mathcal{O}(1) \geq C\int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B(t)} ||J(\varphi)||^{2/n}_\omega d\lambda$$

La preuve sera achevée si l'on montre que l'inégalité (20) est impossible à satisfaire, pour des valeurs de r assez grandes.

Pour chaque $r > 0$, soit $\mathcal{J}(r) := \displaystyle\int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}}\int_{B(t)} ||J(\varphi)||^{2/n}_\omega d\lambda$. La fonction ainsi définie est croissante, et en dérivant succesivement on obtient:

$$r^{2n-1}\int_{|z|=r} ||J(\varphi)||^{2/n}d\sigma = \left(r^{2n-1}\mathcal{J}'\right)'$$

pour toute valeur de r. On fait appel maintenant au lemme suivant (du type E. Borel), classique dans la théorie de Nevanlinna (voir [7]).

Lemme. *Soit $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ croissante, dérivable. Alors pour tout $\delta > 0$, il existe un ensemble $E_\delta \subset \mathbb{R}_+$ tel que $\int_{E_\delta} d\log t < \infty$ et tel que l'on ait: l'inégalité $rF'(r) \leq F^{1+\delta}(r)$, si $r \in \mathbb{R}_+ \setminus E_\delta$.*

Dans notre situation, on applique d'abord l'enoncé précédent à la fonction $F(r) = r^{2n-1}\mathcal{J}'(r)$, avec $\delta = 1/2n-1$. Le lemme précédent montre que

$$r\big(r^{2n-1}\mathcal{J}'(r)\big)' \leq \big(r^{2n-1}\mathcal{J}'(r)\big)^{1+1/2n-1} = r^{2n}\big(\mathcal{J}'(r)\big)^{1+1/2n-1}.$$

Une nouvelle application du lemme, cette fois à la fonction $F(r) = \mathcal{J}(r)$, montre que $\mathcal{J}'(r) \leq \mathcal{J}^2$, en dehors d'un ensemble de mesure logarithmique finie. En conclusion, on aura

$$\big(r^{2n-1}\mathcal{J}'(r)\big)' \leq r^{2n-1}\mathcal{J}^4(r) \tag{21}$$

pour tout $r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$. On ré-ecrit maintenant l'inégalité (15) comme suit:

$$4\log \int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t)} ||J(\varphi)||_\omega^{2/n} d\lambda + \mathcal{O}(1) \leq C \int_0^r \frac{dt}{t^{2n-1}} \int_{B(t)} ||J(\varphi)||_\omega^{2/n} d\lambda$$

si $r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$. On choisit maintenant une suite $(r_k) \subset \mathbb{R}_+ \setminus E$ telle que $r_k \mapsto \infty$. La dernière relation donne alors une contradiction.

Bibliographie

[1] Boucksom, S. *On the volume of a line bundle* AG/0201031 (2002).

[2] Boucksom, S. *Divisorial Zariski decomposition* AG/0204336 (2002).

[3] Boucksom, S., Demailly, J.-P., Păun, M., Peternell, T. *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, AG/.

[4] Campana, F. Connexité rationnelle des variétés de Fano. Ann. Sc. ENS. 25 (1992), 539-545.

[5] Demailly, J.-P. *A numerical criterion for very ample line bundles*, J. Differential Geom 37 (1993) 323-374.

[6] Demailly, J.-P. *Regularization of closed positive currents of type (1,1) by the flow of a Chern connection*, Actes du Colloque en l'honneur de P. Dolbeault (Juin 1992), dit par H. Skoda et J.M. Trpreau, Aspects of Mathematics, Vol. E 26, Vieweg, (1994) 105-126.

[7] Griffiths, P. *Entire holomorphic maps in one and several complex variables* Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press., 1976.

[8] Kobayashi, S., Ochiai, T. *Meromorphic mappings into compact complex spaces of general type*, Inv. Math. **31** (1975).

[9] Kodaira, K. *Holomophic mappings of polydiscs into compact complex manifolds* J. Diff. Geom. **6** (1971).

[10] Kollàr,J., Miyaoka, Y., Mori,S.*Rationally connected Varieties*J.Alg.Geom. 1 (1992), 429-448.

[11] Lelong, P., Gruman, L. *Entire Functions of Several Complex variables,* Springer 1986.

[12] N. Sibony. Dynamique des applications rationnelles de $\underline{P}^k$. in Panoramas et synthèses 8 (1999), 97-185. SMF.

[13] Tsuji, H. *Pluricanonical systems of projective varieties of general type* preprint, AG/9909021.

[14] Yau, S.-T. *On the Ricci curvature of a complex Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978).